Tentamen Lineaire Algebra 1, 7 februari 2006

De toets bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

met $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Bestaan er waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = 0$ strijdig is?

b. Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = 0$ precies 1 oplossing heeft, en bepaal die oplossing.

c. Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = 0$ oneindig veel oplossingen heeft, en bepaal de oplossingsverzameling.

Stel b is de vector gegeven door

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d. Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = b$ strijdig is.

e. Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = b$ consistent is, en bepaal de oplossingsverzameling.

2. Laat $\mathbb{R}^{n\times n}$ de vectorruimte zijn van alle $n \times n$ matrices met reële coefficienten. Voor een gegeven matrix $A = (a_{ij})$ definieren we het *spoor* van A door $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Laat N de deelverzameling zijn van $\mathbb{R}^{n\times n}$ van alle matrices A zodat $\mathrm{tr}(A) = 0$.

a. Toon aan dat N een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

In de rest van deze opgave, neem aan dat $n = 2$.

b. Bepaal een basis E van N. Wat is de dimensie van N?

c. Bepaal een basis F van $\mathbb{R}^{2\times 2}$ zodat $E \subseteq F$.
deelverzameling van

3. Definieer de lineaire afbeelding L van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^3$ door

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cancel{x_3} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de matrix van L ten opzichte van de standaard-bases in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

b. Bepaal de kern $\ker(L)$ van L.

c. Bepaal een basis van de range $L(\mathbb{R}^2)$ van L.

4. Voor een gegeven geheel getal n is P_n de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan n, met reële coefficienten.

a. Geef een basis van P_n.

b. Bepaal de dimensie van P_n.

Definieer de afbeelding $T : P_4 \to P_4$ door

$$T(p(x)) := p(x) - p''(x)$$

c. Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

d. Bepaal de kern $\ker(T)$ van T.

e. Bepaal de matrix $[T]_E$ van T ten opzichte van de geordende basis $E := \{1, x, x^2, x^3\}$.

f. Bepaal de rang van $[T]_E$.

5. Laat x en y lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn, en definieer een deelruimte S van $\mathbb{R}^n$ door $S := \mathrm{span}(x, y)$. Definieer een $n \times n$ matrix A door $A := xy^T + yx^T$.

a. Toon aan dat A symmetrisch is.

b. Bewijs dat $N(A) = S^{\perp}$.

c. Toon aan dat de rang van A gelijk is aan 2.

6. Stel A en B zijn $n \times n$ matrices.

a. Toon aan: als $\lambda \neq 0$ een eigenwaarde is van AB, dan is λ ook een eigenwaarde van BA.

b. Toon aan: als $\lambda = 0$ een eigenwaarde is van AB, dan is $\lambda = 0$ ook een eigenwaarde van BA.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 20
Vraagstuk 2: 12
Vraagstuk 3: 12
Vraagstuk 4: 20
Vraagstuk 5: 16
Vraagstuk 6: 10